

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Άλγεβρας και Γεωμετρίας
Διαφορική Γεωμετρία

Διδάσκων: Βλάχος Θεόδωρος
Σεπτέμβριος 7, 2016

1. (α') Αν για μια C^3 κανονική καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, ισχύει $[\ddot{c}, \ddot{c}, \ddot{c}] = 0$, να δείξετε ότι είναι σταθερής κλίσεως.
(β') Να δοθεί παράδειγμα κανονικής καμπύλης με αρνητική μη σταθερή καμπυλότητα.
2. Έστω κανονική καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο το μήκος τόξου s , καμπυλότητα $\kappa(s) > 0$ και $\vec{n}(s)$ το πρώτο κάθετό της. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$\mathbf{X}(s, v) = c(s) + v\vec{n}(s), \quad (s, v) \in I \times (-\varepsilon, 0),$$

όπου ε θετικός πραγματικός αριθμός.

- (α') Να δείξετε ότι η X είναι κανονική.
 - (β') Να δείξετε ότι αν η X είναι ελαχιστική, τότε η c είναι είτε έλικα, είτε κύκλος.
 - (γ') Να δείξετε ότι αν η X είναι τοπικά ισομετρική με ορθό κυκλικό κύλινδρο, τότε η c είναι επίπεδη.
 - (δ') Να εξετάσετε αν η X έχει ομφαλικά σημεία.
3. Έστω S επιφάνεια με $z = y^2 + \log x$.
 - (α') Να δείξετε ότι S κανονική και να βρείτε το σύστημα συντεταγμένων.
 - (β') Βρείτε τις κύριες διευθύνσεις στο $(1, 0, 0)$.
 - (γ') Είναι η S αναπτυσκτή ;
 - (δ') Έστω μία επιφάνεια \tilde{S} με ελλειπτικά σημεία. Είναι η S τοπικά ισομετρική με αυτή;
 4. Έστω S μια κανονική επιφάνεια, της οποίας όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
 - (α') Να δείξετε ότι η καμπυλότητα Gauss $K = 0$.
 - (β') Να δείξετε ότι αν όλα τα σημεία της S είναι παραβολικά και η καμπύλη c αποτελεί γραμμή καμπυλότητας της S , τότε η c είναι σφαιρική.